

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 14 Απριλίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 60, 61

A2. 1.Λ, 2.Σ, 3.Λ, 4.Λ, 5.Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (3 - 1, 2 - 0) = (2, 2)$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

B2. $\overrightarrow{B\Gamma} = (x_\Gamma - x_B, y_\Gamma - y_B) = (x_0 - 3, 0 - 2) = (x_0 - 3, -2)$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0 \Leftrightarrow (2, 2)(x_0 - 3, -2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(x_0 - 3) + 2(-2) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 - 6 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x_0 = 10 \Leftrightarrow x_0 = 5$$

άρα $\Gamma(5, 0)$

B3. $|\overrightarrow{B\Gamma}| = \sqrt{(x_\Gamma - x_B)^2 + (y_\Gamma - y_B)^2} = \sqrt{(5 - 3)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$|\overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{AB}| \text{ και } \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 90^\circ$$

άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

B4. Έστω $K(x_0, y_0)$

Αφού Γ μέσο BK ισχύει

$$\left. \begin{aligned} x_\Gamma &= \frac{x_B + x_K}{2} \\ y_\Gamma &= \frac{y_B + y_K}{2} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} 5 &= \frac{3 + x_0}{2} \\ 0 &= \frac{2 + y_0}{2} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$x_0 = 7$$

$$y_0 = -2$$

$$\text{άρα } K(7, -2)$$

$$\overrightarrow{AK} = (x_K - x_A, y_K - y_A) = (7 - 1, -2 - 0) = (6, -2)$$

$$(ABK) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AK})| =$$

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |-4 - 12| = 8 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Γ

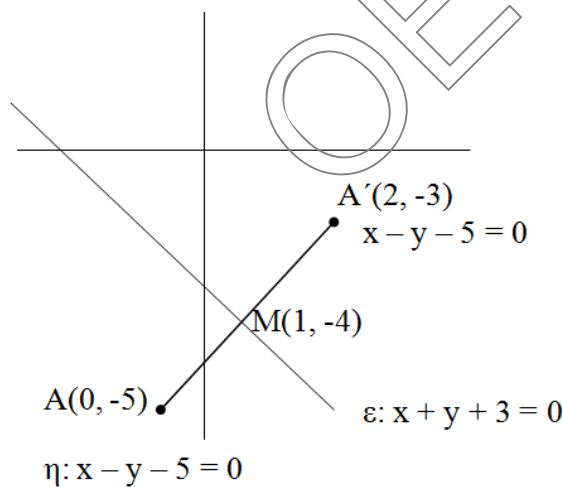
Γ1. Αν (η) η ζητούμενη ευθεία τότε έχουμε: $\eta \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\eta \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\eta \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow$

$$\lambda_\eta = 1$$

$$\eta: y - y_A = \lambda(x - x_A) \Leftrightarrow y + 5 = 1(x - 0) \Leftrightarrow$$

$$y = x - 5$$

Γ2.



$$\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ y = x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$$

Άρα $M(1, -4)$

$$\frac{x_A + x_{A'}}{2} = x_M \Leftrightarrow x_{A'} = 2 \cdot 1 - 0 \Leftrightarrow x_{A'} = 2$$

$$\frac{y_A + y_{A'}}{2} = y_M \Leftrightarrow y_{A'} = 2 \cdot (-4) + 5 \Leftrightarrow y_{A'} = -3$$

άρα $A'(2, -3)$

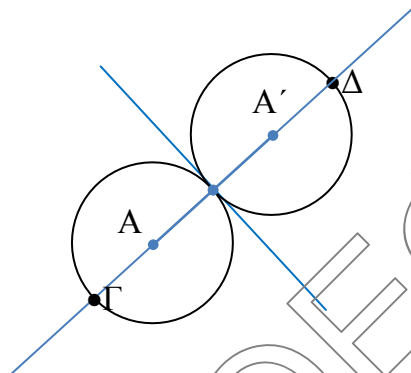
Γ3. $d(A, \varepsilon) = \frac{|10 + 1 \cdot (-5) + 3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

C: $(x - 0)^2 + (y + 5)^2 = \sqrt{2}^2$

C': $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \sqrt{2}^2$

(ή β' τρόπος: $\overline{AM} = \rho \Leftrightarrow \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \rho$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-0)^2 + (-4+5)^2} = \rho \Leftrightarrow \rho = \sqrt{2}$)



Η μέγιστη απόσταση είναι

$(\Gamma\Delta) = (AA') + \rho + \rho = 4\rho = 4\sqrt{2} \mu.$

Γ4. Έστω $Z(x, y)$ σημείο της η_1

$d(Z, \eta) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|x - y - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$|x - y - 5| = 2 \Leftrightarrow x - y - 5 = 2$

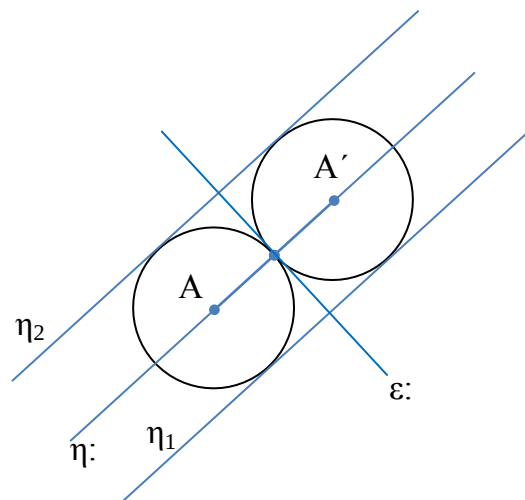
ή $x - y - 5 = -2$

$x - y - 7 = 0$

ή $x - y - 3 = 0$

άρα οι κοινές εφαπτομένες είναι:

$x - y - 7 = 0$, $x - y - 3 = 0$ και η (ε).



ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

i.
$$\left. \begin{array}{l} A = -2 \\ B = 4 \\ \Gamma = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4 + 16 - 4 = 16 > 0 \\ \text{παριστάνει κύκλο } K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) \text{ ή } K(1, -2) \\ \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{array}$$

- ii. Για να παριστάνει ευθεία πρέπει $2\lambda + 1 \neq 0$ ή $1 - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -\frac{1}{2}$ ή $\lambda \neq 1$

Ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{Για } \begin{cases} \lambda = 0 : x + y + 3 = 0 \\ \lambda = 1 : 3x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

για $x = -1, y = -2$

$$(2\lambda + 1)(-1) + (1 - \lambda)(-2) + 3 = 0$$

$$-2\lambda - 1 - 2 + 2\lambda + 3 = 0$$

$$0 = 0 \text{ ισχύει για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

άρα η ε παριστάνει άπειρες ευθείες που διέρχονται από το $T(-1, -2)$

Δ2. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$d(K, \varepsilon) < \rho \Leftrightarrow \frac{|(2\lambda + 1) \cdot 1 + (1 - \lambda)(-2) + 3|}{\sqrt{(2\lambda + 1)^2 + (1 - \lambda)^2}} < 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2\lambda + 1 - 2 + 2\lambda + 3|}{\sqrt{(2\lambda + 1)^2 + (1 - \lambda)^2}} < 2 \Leftrightarrow$$

$$|4\lambda + 2| < 2\sqrt{(2\lambda + 1)^2 + (1 - \lambda)^2}$$

$$|2\lambda + 1| < \sqrt{(2\lambda + 1)^2 + (1 - \lambda)^2} \Leftrightarrow$$

$$(1 - \lambda)^2 > 0 \text{ ισχύει για κάθε } \lambda \neq 1$$

Δ3. Εφαρμόζουμε Π.Θ. στο KMT

$$(KT)^2 = (KM)^2 + (MT)^2$$

$$2^2 = (KM)^2 + \sqrt{2}^2 \Leftrightarrow$$

$$(KM)^2 = 2$$

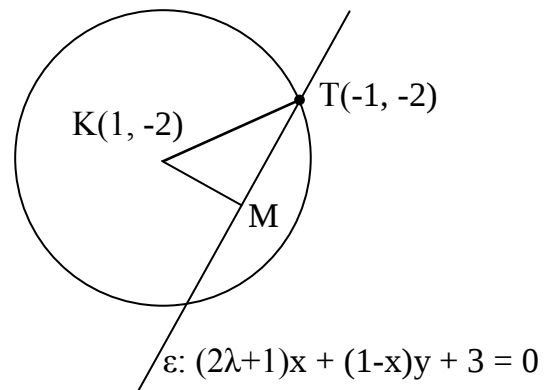
$$(KM) = \sqrt{2}$$

$$d(K, \varepsilon) = (KM) \Leftrightarrow$$

$$\frac{|(2\lambda + 1) \cdot 1 + (1 - \lambda)(-2) + 3|}{\sqrt{(2\lambda + 1)^2 + (1 - \lambda)^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

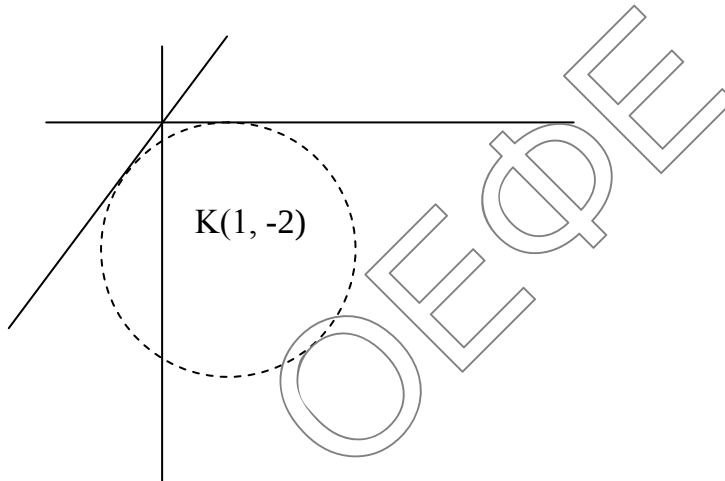
$$\frac{|2\lambda + 1 - 2 + 2\lambda + 3|}{\sqrt{4\lambda^2 + 4\lambda + 1 - 2\lambda + \lambda^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$|4\lambda + 2| = \sqrt{2} \sqrt{5\lambda^2 + 2\lambda + 2} \Leftrightarrow$$



$$\begin{aligned}
 (4\lambda + 2)^2 &= (\sqrt{2} \sqrt{5\lambda^2 + 2\lambda + 2})^2 \Leftrightarrow \\
 16\lambda^2 + 16\lambda + 4 &= 2(5\lambda^2 + 2\lambda + 2) \Leftrightarrow \\
 16\lambda^2 + 16\lambda + 4 &= 10\lambda^2 + 4\lambda + 4 \Leftrightarrow \\
 6\lambda^2 + 12\lambda &= 0 \Leftrightarrow \\
 \lambda^2 + 2\lambda &= 0 \Leftrightarrow \\
 \lambda(\lambda + 2) &= 0 \Leftrightarrow \\
 \lambda = 0 \text{ ή } \lambda &= -2
 \end{aligned}$$

Δ4.



Έστω $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ ή $x = x_0$ η εξίσωση της εφαπτομένης αφού διέρχεται από το $O(0, 0)$ ισχύει

$$y = \lambda x \text{ ή } x = 0$$

$$\text{Για την } y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$$

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 1 - 1(-2)|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow |\lambda + 2| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$|\lambda + 2|^2 = (2\sqrt{\lambda^2 + 1})^2 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 4\lambda^2 + 4 \Leftrightarrow 3\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda(3\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = \frac{4}{3}$$

$$\varepsilon_1: y = 0 \text{ ή } \varepsilon_2: y = \frac{4}{3}x$$

Για την $x = 0$:

$$d(K, \varepsilon) = 1 < \rho \quad \text{απορρίπτεται}$$

$$\varepsilon_1 // \vec{\delta}_1 = (1, 0)$$

$$\varepsilon_2 // \vec{\delta}_2 = (3, 4)$$



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018
Β΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ2Θ(α)

$$\cos(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \cos(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| |\vec{\delta}_2|} =$$

$$\frac{(1,0) \cdot (3,4)}{\sqrt{1^2 + 0^2} \sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}$$

ΟΕΦΕ